דיון על הסתברויות (או איך להראות את הרפואה בקלקלתה)

יהיו לנו 3 מטבעות. C0 מאוזן (0.5 H ו- 0.5 T) , C1 שנותן 0.99 H ו- 0.1 T, ומטבע C2 שנותן בהסתברות 1 H ובהסתברות 0 T. קוביה מאוזנת D0.

נסמן את ההסתברות שמאורע x יקרה כ- Pr(x). אצל רבים קיים בלבול בין הסתברות ותוחלת. דוגמה פשוטה, בשליחת טור לוטו ההסתברות היא 1 ל-16 מליון ונניח שהפרס הוא 4 מליון. התוחלת היא המכפלה של הסיכוי לתוצאה, בערך התוצאה, כלומר:

$4*1/16 = 1/4$ Shekel

טור עולה שקל ולכן לא כדאי לשלוח (התערבות מופסדת).

באנגלית התוחלת ניקראת: (Expected Value). עוד דוגמה: אם מישהו חושב ששוק ההון עומד לרדת באחוז אחד, בהסתברות של 70% ובהסתברות של 30% הוא ירד ב-10%, האם כדאי להשקיע רגיל או בחסר? תכפילו ותראו.

נחזור למטבעות. אם נניח שעבור H במטבע C1 נקבל 2 שקלים ועבור T נקבל 3 שקלים, כמה נצפה להרויח? $2*0.99 + 0.01*3$

מאורעות בלתי תלויים
מאורע - זוהי תוצאה אפשרית של ניסוי. למשל המאורע: {6} בקוביה, או קבוצה של מאורעות: {2,5} עבור כל מאורע x ממרחב המאורעות האפשריים, נוכל לחשב את הסיכוי שלו לקרות וכיוון **שמאורעות אינם תלויים זה בזה**, סך הסיכויים של כל המאורעות לקרות שווה ל-1 $1/6+1/6+1/6+1/6+1/6+1/6=1$

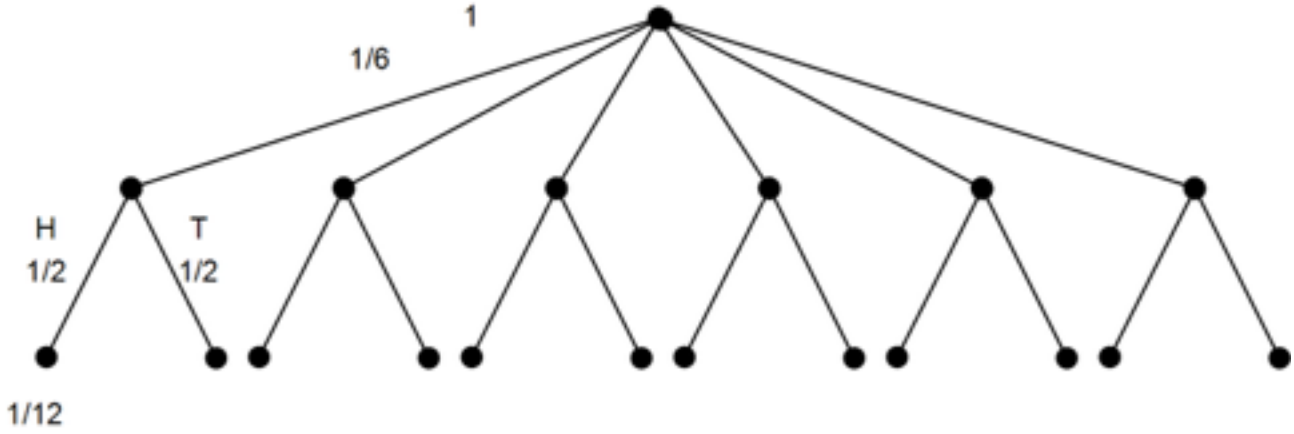
$Pr(\{2,5\}) = Pr(5) + Pr(2) = 1/6 + 1/6 = 1/3$

גם לקבוצה של מאורעות אפשר לקרוא מאורע, למשל: {2,5}
מאורע משלים - זהו מאורע שישלים את הסיכוי של המאורע המקורי ל- 100%. למשל: מה המאורע המשלים של: {2,5} זהו כמובן: {1,3,4,6} אם המאורע מסומן כ- A, המשלים שלו יסומן כ- ~A

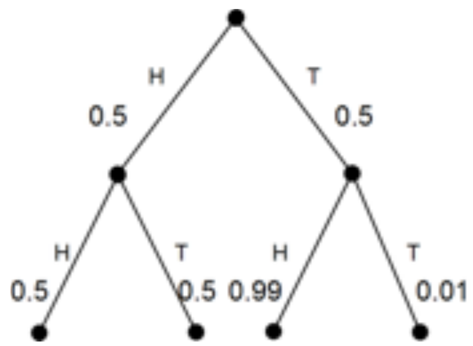
נדבר גם על איחוד וחיתוך בין מאורעות: $A \cup B$ $A \cap B$

חישוב של הסיכוי של מאורעות בלתי תלויים נעשה על ידי מכפלת הסיכוי לכל מאורע. למשל מה הסיכוי שאם נזרוק את הקוביה הנ״ל ואח״כ את המטבע C0, ונקבל (1,H)? $1/6*(1/2)= 1/12$

ומבחינה ציורית:



אפשר גם להסתכל על מקרים קצת יותר מעניינים כמו לזרוק מטבע C0, אם קיבלנו H לזרוק שוב את C0, ואם קיבלנו T, לזרוק את C1, ואז נקבל את העץ הבא:



Pr [T,H] = 0.5*0.99

כעת נדבר על הסתברות תלויה ומשפט בייז

בואו נראה את ההבדל בין הסתברות בלתי תלויה וכזו שתלויה בין מאורעות. נניח שנקרא למאורעות A ו- B. ונסמן את הסיכוי ש- A יקרה, כאשר אנחנו יודעים ש- B כבר קרה, כ- Pr(A|B)

נקרא לזה נוסחת התלות   Pr(A|B) = Pr[A,B] / Pr[B]

Pr[A,B] זה הסיכוי שגם A יקרה וגם B יקרה.

דוגמאות:

מטילים את הקוביה D0, מהו: Pr[x>1] ? כמובן זה 5/6

מטילים את הקוביה D0, מהו: Pr[x=even] ? כמובן זה 3/6

מטילים את הקוביה D0, מה הסיכוי שהתוצאה גם גדולה מ-1 וגם זוגית? זה כמו הסיכוי שהתוצאה זוגית 3/6, כי הסיכוי שהתוצאה גדולה מ-1 הוא גדול יותר , אבל הוא מתקיים אם התוצאה זוגית (אינטואיטיבית)

המקרה המעניין: מטילים את הקוביה D0 ומישהו אמר לנו שהתוצאה גדולה מ-1, מה הסיכוי שהיא זוגית?

לפי נוסחת התלות   Pr(x = even | x>1) = (3/6) / (5/6) = 3/5

כלומר, אם מישהו כבר נתן לנו את המידע שהתוצאה גדולה מ-1, קל לנו יותר לנחש שהתוצאה זוגית (אינטואיטיבית הוא העלים את האפשרות של 1)

מקרה עו יותר ברור: מה הסיכוי שהתוצאה גדולה מ-1, אם מישהו כבר גילה לנו שהתוצאה הייתה זוגית?

Pr[x>1 | x=even] = (3/6) / (3/6) = 1

משפט בייז אומר את הדבר הבא: Pr(A|B) = Pr(B|A)*Pr(A) / Pr(B)

המשפט חשוב, כי לפעמים לחשב את Pr(A), Pr(B) ו- Pr(B|A) יותר קל מלחשב את: Pr(A|B)

ההוכחה למשפט היא די פשוטה למי שמעוניין.

Pr[A|B]= Pr[A,B]/Pr[B]   כפי שראינו קודם

*=> Pr[A,B] = Pr[A|B]*Pr[B] (1)*

*אם מחליף את A ו- B נקבל מצד שני ש: Pr[B,A] = Pr[B|A]*Pr[A]   (2)*

וכמובן ש: Pr[A,B] = Pr[B,A]

וכעת ניקח ונשווה את צד ימין של (1) וצד ימין של (2), אז נקבל:

*Pr[A|B]*Pr[B] = Pr[B|A]*Pr[A]*

אם נחלק את שני בצדדים ב- Pr[B], נקבל את משפט בייז

עבור הסתברויות בלתי תלויות אחת בשניה מתקיים: Pr[A,B]=Pr[A]*Pr[B] (אם ורק אם). אם המאורעות A ו- B אינם תלויים זה בזה, הרי: Pr[A|B] = Pr[A] וגם: Pr[B|A] = Pr[B]

כדי לעבור לשימוש מעשי במשפט בייז נסתכל על מקרה שבו המאורע B תלוי גם ב A וגם ב- ~A
לדוגמה A אדם בריא והמשלים זה ~A אדם חולה.נניח שהסיכוי לחלות באוכלוסיה הוא: 0.001 (אחד לאלף)
מאורע B זו בדיקה רפואית שאמורה לזהות את המחלה, אבל אינה מושלמת ומזהה רק ב-95%. כלומר 5% שמזוהים כחולים הם למעשה בריאים - זה ניקרא: False positive. כלומר B זה איבחון חולה.

קודם נלמד את התאוריה מאחורי החישוב ואח״כ נחשב מה הסיכוי שאדם בריא אובחן כחולה.

בדוגמה שהזכרנו:
Pr[B|A] = 0.05 זהו זיהוי של חולה כאשר האדם למעשה בריא
Pr[A] = 0.999 הסיכוי שאדם בריא
Pr[~A] = 0.001 הסיכוי שאדם חולה
Pr[B|~A] = 0.95 הסיכוי לאבחן מישהו חולה כאשר יודעים שהוא חולה (זו איכות הבדיקה)

שימו לב לדבר הבא, אני טוען ש: Pr[B] = Pr[B | A]*Pr[A] + Pr[B|~A]*Pr[~A] אינטואיטיבית זה אומר שאדם מאובחן כחולה (B) בסיכוי שהוא סכום הסיכויים של סיכוי שהוא בריא ובבדיקה יצא חולה + שהוא באמת חולה ובבדיקה גם יצא חולה.

ובאמת אם תציבו את המספרים הנ״ל:
0.05*0.999 + 0.95*0.001 = 0.05

כתוצאה ממשפט בייז ומהמשוואה האחרונה שהצגנו נובע השוויון הבא:

Pr[A|B] = (Pr[B|A]*Pr[A]) / (Pr[B | A]*Pr[A] + Pr[B|~A]*Pr[~A])

המונה הוא בדיוק ממשפט בייז והמכנה היא ההצבה של Pr[B] מהמשוואה האחרונה.

כעת שימו לב, זהו חישוב מעניין כי זה אומר לנו מה הסיכוי שלנו להיות בריאים למרות שהבדיקה זיהתה אותנו כחולים (הרופאים חושבים שזה 5%)

Pr[A|B] = (0.05* 0.999) / [0.05* 0.999 + 0.95*0.001] = 98%

הסבר אינטואיטיבי: נניח שיש מדגם של 1000 איש שנבדקים. מתוכם בממוצע אחד חולה על פי הסטטיסטיקה באוכלוסיה, אולם על פי הדיוק של הבדיקה, מתוך ה-1000 ׳יתגלו׳ 50 שחלו (אבל לא חלו באמת), אז אם נכתוב את היחס של החולים לאלה שגילתה הבדיקה נקבל : 1/51, כלומר כ-2% סיכוי להיות חולה אם הבדיקה קבעה שאנו חולים (או 98% להיות בריאים כפי שמצאנו קודם). כדי לחדד זאת אזכיר שכאשר הרופאים אמרו שסיכויינו להיות חולים הוא 95%, אבל בעצם זה רק 2%. פחות מרופא אחד לחמישה יודע זאת.